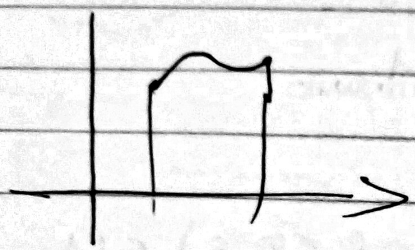
23/10/17

Γιατί χρειαζόμαστε αυτές τις βασικές τοπολογικές έννοιες (ανοικτά, κλειστά, κλπ);

Π.χ. Έστω $f:[a,\beta] \to \mathbb{R}$ σ/ς
$\quad_{\subset\mathbb{R}}$

Τότε τι ισχύει που δεν ισχύει αν π.χ $f(a,\beta) \to \mathbb{R}$ σ/ς;



Μία βασική διαφορά είναι ότι η πρώτη που ορίζεται στο συμπαγές $[a,\beta]$ λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο ενώ η δεύτερη που ορίζεται στο ανοιχτό (a,β), όχι απαραίτητα.

Πρόταση: $U \subset \mathbb{R}^n$ τότε

α) $\underset{\text{εσ } U}{\operatorname{int} U} \subset U \quad D = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \;\; \exists\, \varepsilon > 0 \;\; B(\bar{x},\varepsilon) \subset U\}$
$= \dot{U}$ εσ του U.

β) $\operatorname{int} U$ ανοιχτό

γ) U ανοιχτό $\Leftrightarrow \operatorname{int} U = U$

δ) $U \subset V \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \operatorname{int} U \subset \operatorname{int} V$ $\{\bar{x} \in \operatorname{int} U \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ $B(\bar{x},\varepsilon) \subset V \overset{\text{άρα}}{\Leftrightarrow}$ $\bar{x} \in \operatorname{int} V$.

ε) $\operatorname{ext} U = \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus U) \subset \mathbb{R}^n \setminus U$.
$= \operatorname{int}(\mathbb{R}^n \setminus U)$

Παράδειγμα/Άσκηση

Έστω $B(\bar{x},r)$ η ανοιχτή μπάλα (<<σφαίρα προέλευσης>>) Δ.Ο $\operatorname{int} B(\bar{x},r) = B(\bar{x},r) = \operatorname{int} \underbrace{\bar{B}(\bar{x},r)}_{\text{κλειστή μπάλα}}$

συν...

$ext\, B(\bar{x},r) = ext\, \bar{B}(\bar{x},r) = \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(\bar{x},r)$ γιατί ανοιχτό είναι κλειστό.

$\boxed{U \text{ κλειστό} \Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus U \text{ ανοιχτό}}$

$\partial B(\bar{x},r) = \partial \bar{B}(\bar{x},r) = S(\bar{x},r) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y}-\bar{x}\| = r\}$

(κλειστή μπάλα) (σφαίρα)

Ορισμός: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε η τομή όλων των κλειστών υπερσυνόλων του U ή αλλιώς υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το U ονομάζεται κλειστή θήκη (ή τοπολογική θήκη) του U συμβολίζεται με $\bar{U}$ δηλ. $\bar{U} = \bigcap K$ με $K \in \mathcal{K}$

* κλειστή θήκη το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει U. *

$\mathcal{K} = \{K \subset \mathbb{R}^n : U \subset K\}$ K κλειστό

Πρόταση 1.35

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε

α) $U \subset \bar{U}$

β) $\bar{U}$ κλειστό

γ) $U \subset K \subset \mathbb{R}^n$, K κλειστό $\Rightarrow \bar{U} \subset K$

δ) U κλειστό $\Leftrightarrow U = \bar{U}$

Παρατήρηση: Από τα α, β, γ προκύπτει ότι η κλειστή θήκη $\bar{U}$ είναι το «μικρότερο» υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $U \subset \bar{U}$ (βλέπε γ).

* $A = B(\bar{x}, r) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| < r\}$

Θ.ν.δ.ο $(r>0)$

αν.ουω (**) $A \subset \mathbb{R}^n$, ανοιχτό $\iff \forall \bar{x} \in A \ \exists\, \varepsilon > 0 \ B(\bar{x},\varepsilon) \subset A$

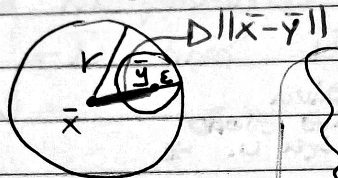
Δηλ. Θ.ν.δ.ο

$\forall \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\bar{x}-\bar{y}\| < r$ $\quad \exists\, \varepsilon>0 : B(\bar{y},\varepsilon) \subset A$

$\bar{z} \in B(\bar{y},\varepsilon) \Rightarrow \bar{z} \in B(\bar{x}, r) \iff$

$\boxed{\|\bar{z}-\bar{y}\| < \varepsilon} \quad \iff \|\bar{z}-\bar{x}\| < r$

Σχηματικά



$$\left\{\begin{array}{l} \|\bar{x}-\bar{y}\| = r-\varepsilon, \ \varepsilon>0 \\ \|\bar{z}-\bar{y}\| < \varepsilon \\ \Rightarrow \|\bar{z}-\bar{x}\| < r \end{array}\right.$$

Θ.ν.δ.ο $\|\bar{z}-\bar{x}\| = \|\bar{z}-\bar{y}+\bar{y}-\bar{x}\| \le \underbrace{\|\bar{z}-\bar{y}\|}_{\text{αυτό}} + \underbrace{\|\bar{y}-\bar{x}\|}_{=r-\varepsilon} < r$

{Δ - αυτό}

Επιστρέφω στη Πρόταση.

Απόδειξη: (α) έστω $\bar{x} \in U$ και $K \supset U$, K κλειστό

$\Rightarrow \bar{x} \in K \ \forall K \in \mathcal{K} \Rightarrow \bar{x} \in \bigcap_{K \in \mathcal{K}} K = \bar{U}$

β) $\bar{U}$ = τομή κλειστών συνόλων (όσα και να είναι αυτά) = κλειστό.

γ) $U \subset K$, K κλειστό $\Rightarrow K \in \mathcal{K} = \{L \subset \mathbb{R}^n : U \subset L, \ L$ κλειστό$\}$

$\Rightarrow \bar{U} = \bigcap_{L \in \mathcal{K}} L \subset K$ [έστω $\bar{x} \in \bigcap \Rightarrow \bar{x} \in L$

$\forall k \in X \underset{k\in X}{\Rightarrow} \bar{x} \in k$]

δ) i) $U = \bar{U} \underset{(\beta)}{\Leftrightarrow} U$ κλειστό

ii) $U \subset U$, U κλειστό $\Rightarrow U \in X \underset{(a)}{\Rightarrow} \bar{U} \subset U$

και επίσης από το (a) $U = \bar{U}$

Ορισμός: Έστω $U \in \mathbb{R}^n$. Ένα $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται

a) μεμονωμένο σημείο του U, αν $\exists \varepsilon > 0$ $B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U = \{\bar{x}\}$

β) σημείο συσσώρευσης του U, αν

γ) σημείο ~~επαφής~~ επαφής του U, αν $\bar{x} \in U$, ή $\bar{x} \in \bar{U}$

παράγωγο σύνολο = σύνολο σημείων συσσώρευσης

αν $\forall \varepsilon > 0$ $U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

Το 0 είναι σημ συσσώρευσης του (0,1] στον $\mathbb{R}$:

Άσκηση: Δ.Ο κάθε ανοιχτή μπάλα περιέχει τουλ μια και περιέχεται σε τουλ μια κλειστή μπάλα, και αντίστοιχα για κλειστές μπάλες.

Άσκηση: Δ.Ο το συμπλήρωμα ενός κλειστού συνόλου είναι ανοιχτό.

Επίσης a) $\bar{x}$ μεμ σημ $\Rightarrow$ β) $\bar{x} \in U \Rightarrow \bar{x}$ ή μεμ ή σημ συσσώρευσης

$\bar{x} \in U \cap \partial U$

γ) $\operatorname{int} U \subset U$

δ) $\operatorname{ext} U \subset \mathbb{R}^n / U$

Προσοχή ?? ??